Ref : Fulton Harris
+ TD

Développement : Table de caractère de S_4 :

leçon 105
107
161
101
104
160
(191)

▶ 1 : Les classes de conjugaison de S_4 :

Les caractères étant constant sur les classes de conjugaison, on s'intéresse particulièrement à celle-ci.

Les classes de conjugaison du groupe symétrique S_n sont les différents types de décomposition en produit de cycles à support disjoint.

On a donc

#	1	6	8	6	3
S_4 représ.	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
nom	identité	transpo	3 cycle	4 cycle	double transpo

et S_4 possède 5 classes de conjugaison.

▶ 2 : A la recherche des représentations irréductibles de S_4

Il y a autant de classe de conjugaison que de représentations irréductibles, c'est à dire 5 pour S_4.

$$\rho_{triv} : S_4 \longrightarrow \mathbb{C}^* \ (= GL(\mathbb{C}))$$
$$\sigma \longmapsto 1$$

la représentation triviale de degré 1

$$\rho_{sgn} : S_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$\sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma)$$

la représentation signature de degré 1

en sont déjà deux. Elles sont irréductibles car de degré 1.

S_4	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_{sgn}	1	-1	1	-1	1

Soit $\rho : S_4 \rightarrow GL(\mathbb{C}^4)$ la représentation de permutation
$\sigma \mapsto (e_i \mapsto e_{\sigma(i)})$

Le caractère d'une représentation de permutation étant le nombre de points fixes de la permutation, on a $\chi_\rho = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On remarque alors que ρ n'est pas irréductible : en effet, $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 2$.

ρ laisse stable $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V$ (en effet $\forall \sigma \in S_4$, $\forall z = z_1+z_2+z_3+z_4 \in V$,

$$\rho(\sigma)(z) = (z_{\sigma(1)} + z_{\sigma(2)} + z_{\sigma(3)} + z_{\sigma(4)})$$
$$= z \text{ par commutativité du } + \;)$$

donc $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sous représentation de ρ de degré 1 : c'est en fait une représentation isomorphe à la représentation triviale.

Soit $W = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C} ;\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$ un supplémentaire de V.
Remarquons que W est stable par ρ, et sur W ρ induit une représentation ρ_{stand} appellée la représentation standart. On a :

$$\rho = \rho_{triv} \oplus \rho_{stand}$$

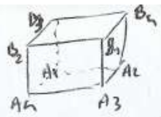
et en passant au caractère, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{stand} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On vérifie bien $\langle \chi_{stand}, \chi_{stand} \rangle = 1$.

S_4	Id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_{sgn}	1	-1	1	-1	1
ρ_{stand}	3	1	0	-1	-1

* Par la formule des degrés, on a $\mathrm{card}(S_4) = \sum_{i=1}^{5} \deg(\rho_i)^2$ où $\rho_{i=1,\dots,5}$ sont les 5 représentations irréductibles de S_4.
Ainsi, pour ρ_4 et ρ_5 les deux derniers représentations irréductibles, on a $24 = 11 + d°(\rho_4)^2 + d°(\rho_5)^2 \Rightarrow \begin{cases} \deg(\rho_4) = 2 \\ \deg(\rho_5) = 3 \end{cases}$

Lemme : $S_4 \simeq Isom^+(cube)$



Il y a 4 grandes diagonales du cube. Les isométries préservant les distances, l'ensemble Δ des grandes diagonales est laissé stable par toute isométrie. On obtient donc une action de $Isom^+(cube)$ sur Δ, d'où le morphisme $\varphi : Isom^+(cube) \to S^4$
$g \mapsto g_{|\Delta}$

- surjectif :
  il faut exhiber la réalisation de chaque transposition, car S_4 engendré par les transpositions.
- injectif :
  soit g une isométrie fixant chaque diagonale
  $\to$ Supposons $g(A_1) = A_1$. Alors B_1 est envoyé sur B_1.
  $|A_1A_2| \neq |A_1B_2|$ donc $g(A_2B_2) = A_2B_2$ donc $\begin{cases} g(A_2) = A_2 \\ g(B_2) = B_2 \end{cases}$
  De même, $g(A_3) = A_3$.
  Or $\{A_1, A_2, A_3, B_2\}$ définit un repère affine de $\mathbb{R}^3$.
  $\to$ si $\forall i$, $g(A_i) = B_i$.
  Alors g symétrie centrale du cube. Mais $g \in Isom^+$ ... contradiction.
  (dans $\mathbb{R}^2$, isométrie centrale = rotation d'un demi tour $\to$ positif
  dans $\mathbb{R}^3$, isométrie centrale $\to$ négatif)

Ainsi $Isom^+(cube) \cong S_4$.

Ainsi on associe :

- $Id \longrightarrow$ identité
- $(12) \longrightarrow$ rotation d'angle $\pm\pi$ passant par le milieu de deux arêtes opposées
- $(123) \longrightarrow$ rotation d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ et d'axe une grande diagonale
- $(1234) \longrightarrow$ rotation d'angle $\pm \pi/2$ d'axe passant par le centre de deux faces opposées
- $(12)(34) \longrightarrow$ rotation d'angle $\pm\pi$ d'axe passant par le centre de deux faces opposées.

La trace d'une rotation vectorielle d'angle θ est $1 + 2\cos\theta$
donc $\chi_c = (3, -1, 0, 1, -1)$.

On vérifie bien $\langle \chi_c, \chi_c \rangle = 1$.

(pour $\rho_c : S_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{R})$ la représentation naturelle de S_4 qui à $\sigma \in S_4$ associe la matrice de la partie linéaire de l'isométrie correspondante dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Enfin on trouve le dernier caractère par orthogonalité, pour obtenir :

#	1	6	8	6	3
S_4	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
ρ_{triv}	1	1	1	1	1
ρ_{sgn}	1	-1	1	-1	1
ρ_{stand}	3	1	0	-1	-1
ρ_4	3	-1	0	1	-1
ρ_5	2	0	-1	0	+2

Remarque dev :

La représentation standart peut aussi s'obtenir comme action de S_4 sur les sommets du tétraèdre !